www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

1. L'ensemble des nombres réels

1.1. Valeur absolue :

① $\forall x \in \mathbf{R} \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

② $\forall x \in \mathbf{R}$ *et* $a \in \mathbf{R}, \quad |x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$

③ $\forall x_1, ..., x_n \in \mathbf{R} \quad \left|\prod_{i=1}^{n} x_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |x_i|$

④ $\forall x_1, ..., x_n \in \mathbf{R} \quad \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

⑤ $\forall x, y \in \mathbf{R} \quad \big||x| - |y|\big| \le |x - y|$

⑥ $\forall x, y \in \mathbf{R} \quad \big||x| - |y|\big| \le |x + y| \le |x| + |y|$

1.2. Borne supérieur et borne inférieur :

① a majorant de $A \Leftrightarrow \forall x \in A \neq \varnothing \quad a \ge x$

b minorant de $A \Leftrightarrow \forall x \in A \neq \varnothing \quad b \le x$

A est borné si elle est majoré et minoré

② $\alpha = Max(A) \Leftrightarrow \alpha \in A \neq \varnothing$ et α majorant de A

$\beta = min(A) \Leftrightarrow \beta \in A \neq \varnothing$ et β minorant de A

④ $\alpha = Sup(A) \Leftrightarrow \alpha$ majorant de A et $\alpha \le M \ \forall M$ major de A

$\beta = Inf(A) \Leftrightarrow \beta$ minorant de A et $\beta \ge m \ \forall m$ minore de A

⑤ Tout partie de $\mathbf{N}$ non vide admet un minimum

Tout partie de $\mathbf{R}$ non vide et majoré admet borne supérieur

Tout partie de $\mathbf{R}$ non vide et minoré admet borne inférieur

⑥ $\forall a, b \in \mathbf{R} \quad Sup(a,b) = \dfrac{a + b + |a - b|}{2} \quad Inf(a,b) = \dfrac{a + b - |a - b|}{2}$

on plus $Sup(a,b) + Inf(a,b) = a + b$

1.3. Partie entier d'un réels :

1.3 1. Raisonnement par récurrence :

Soit $n \in \mathbf{N}$ et $P(n)$ propriété dépens de n. S'il $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ tel que :

① $P(n_0)$ est vraie

② $\forall n \in \mathbf{N}$ et $n \ge n_0$ Si $P(n)$ vraie $\Rightarrow$ $P(n+1)$ vraie

Alors $\forall n \in \mathbf{N}$ et $n \ge n_0$ on a $P(n)$ est vraie

1.3 2. Archimède :

$\forall \alpha > 0$ *et* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbf{N}^* \ / \ n\varepsilon > \alpha$

Colorer $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ *et* $\exists m \in \mathbf{N} \quad \exists n \in \mathbf{N}^* \ / \ m < \alpha < n$

1.3 3. Propriété :

① $\forall x \in \mathbf{R} \quad \exists! n \ / \ n \le x < n+1$ n partie entier de x noté $E(x)$

② $\forall x \in \mathbf{R} \quad E(x) = Max(\{n \in \mathbf{Z}, n \le x\})$

$\forall x \in \mathbf{R} \quad E(x) \le x \le E(x+1) \Rightarrow x - 1 < E(x) \le x$

③ $\forall x \in \mathbf{R} \quad E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbf{Z}$

$\forall x, y \in \mathbf{R} \quad x \le y \Rightarrow E(x) \le E(y)$

$\forall x \in \mathbf{R} \quad \forall m \in \mathbf{Z} \Rightarrow E(x+m) = E(x) + m$

1.4. Propriété dans R :

① A partie convexe $\Leftrightarrow \forall x, y \in A$ *et* $x < y$ *on a* $[x, y] \le a$

② A partie dense $\Leftrightarrow \forall x, y \in A$ *et* $x < y \quad \exists a \in A \ / \ x < a < y$

③ $\forall a > 0$ *et* $\forall x \in \mathbf{R} \quad a^x = e^{x \log(a)}$

2. Suite numériques

2.1. Généralité :

① $(U_n)_{n \in I}$ Suite constante $\Leftrightarrow \forall n, m \in I \quad U_n = U_m$

$(U_n)_{n \in I}$ Suite stationnaire $\Leftrightarrow \exists n \in I \quad \forall n \ge p \quad U_n = U_p$

$(U_n)_{n \in I}$ Suite borné $\Leftrightarrow \exists n > 0 \quad \forall n \in I \quad |U_n| \le m$

③ $(U_n)_{n \in I}$ majoré $\Leftrightarrow \exists \alpha \ / \ U_n \le \alpha$ on note $\alpha = Sup(U_n)$

$(U_n)_{n \in I}$ minoré $\Leftrightarrow \exists \beta \ / \ U_n \ge \beta$ on note $\beta = Inf(U_n)$

④ $(U_n)_{n \in I}$ croissante $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad U_n \le U_{n+1}$

$(U_n)_{n \in I}$ décroissante $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad U_n \ge U_{n+1}$

⑤ Soit $U_n > 0$ alors $(U_n)_{n \in I}$ croissante $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \ge 1$

2.2. Convergence et divergence :

① (U_n) Suite convergente si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lambda \in \mathbf{R}$ sinon divergente

② $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty \Rightarrow (U_n)$ minoré et n'est pas majoré

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty \Rightarrow (U_n)$ majoré et n'est pas minoré

(U_n) borné $\Leftrightarrow (U_n)$ minoré et majoré

③ (U_n) convergente $\Rightarrow (U_n)$ borné

④ Soit $V_n \le U_n \le W_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} W_n = l \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$

⑤ Soit $U_n \le V_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$

Soit $U_n \le V_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$

⑥ $(U_n)\nearrow$ et majoré $\Rightarrow (U_n)$ convergente $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = Sup(U_n)$

$(U_n)\searrow$ et minoré $\Rightarrow (U_n)$ convergente $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = Inf(U_n)$

⑦ $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ et (V_n) minoré $\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (U_n + V_n) = +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$ et (V_n) majoré $\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (U_n + V_n) = -\infty$

2.3. Suite arithmétique et suite géométrique :

2.3.1 Suite arithmétique :

① (U_n) Suite arithmétique $\Leftrightarrow U_{n+1} = U_n + r \quad avec\ r \in \mathbf{R}$

② $\forall n, m \in \mathbf{N} \quad U_n = U_m + (n - m)r$ aussi $U_n = U_0 + nr$

③ $r = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad U_n = U_0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = U_0$

$r > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ *et* U_n *str*$\nearrow$

$r < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$ *et* U_n *str*$\searrow$

④ $S_n = \sum_{i=p}^{n} U_i = (U_p + U_n)\dfrac{(n - p + 1)}{2}$

⑤ Relation entre 3 terme successive a, b et c : $a + c = 2b$

2.3.2. Suite géométrique :

① (U_n) Suite géométrique $\Leftrightarrow U_{n+1} = qU_n \quad avec\ q \in \mathbf{R}$

② $\forall n, m \in \mathbf{N} \quad U_n = U_m q^{n-m}$ aussi $U_n = U_0 + q^n$

③ Soit $q \in \mathbf{R}^* \quad q^n$ convergente $\Leftrightarrow q \in]-1, 1]$

$q = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$

$q \in]-1, 1[\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

$q > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

$q \le -1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ ne existe pas

④ Si $q = 1 \Rightarrow S_n = \sum_{i=p}^{n} U_i = (n - p + 1)U_p$

Si $q \ne 1 \Rightarrow S_n = \sum_{i=p}^{n} U_i = U_p \dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$

⑤ Relation entre 3 terme successive a, b et c : $ac = b^2$

2.4. Suites adjacents :

(U_n) et (V_n) adjacents $\Leftrightarrow (U_n)\nearrow$, $(U_n)\searrow$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0$

① (U_n) et (V_n) adjacents $\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = l \in \mathbf{R}$

$(U_n)\nearrow$ donc $U_0 \le U_n \le l \le V_n \le V_0$

② Soit $a_n \le b_n \quad I_n = [a_n, b_n]$ segment emboîté si $\forall n \in \mathbf{N} \quad I_{n+1} \subseteq I_n$

Soit $\bigcap I_n$ un segment si $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n - b_n) = 0 \Rightarrow \bigcap I_n$ singleton

2.5. Suites de Cauchy :

(U_n) Suite de Cauchy si $\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbf{N}^*\ \forall n,m>N\ \ |U_n-U_m|\le\varepsilon$

(U_n) Suite de Cauchy $\Leftrightarrow$ (U_n) convergente

2.6. Suites extraite :

$(U_{f(n)})$ Suite extraite de (U_n) $\Leftrightarrow$ $f:\mathbf{N}\mapsto\mathbf{N}$ est ↗

① $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=l\in\bar{\mathbf{R}}$ (α_n) extraite de (U_n) alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=l$

② (α_n) et (β_n) extraite de (U_n) si (α_n) divergente ou $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n\neq\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n$ donc (U_n) divergente

③ $\alpha_n=U_{2n}$ $\beta_n=U_{2n+1}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=l\in\bar{\mathbf{R}}\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n=l$

2.7. Comparaison des suites réelles :

(α_n) borné, $U_n=\alpha_nV_n\Rightarrow(U_n)$ dominé par (V_n) noté $U_n=O(V_n)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n=0$, $U_n=\beta_nV_n\Rightarrow(U_n)$ négligable a (V_n) noté $U_n=o(V_n)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\gamma_n=0$, $U_n=\gamma_nV_n\Rightarrow(U_n)$ équivalent a (V_n) noté $U_n\underset{+\infty}{\sim}V_n$

① $U_n=O(V_n)\Leftrightarrow\dfrac{U_n}{V_n}$ borné

$U_n=o(V_n)\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{U_n}{V_n}=0$

$U_n\underset{+\infty}{\sim}V_n\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{U_n}{V_n}=1$

② $U_n=o(V_n)\Rightarrow U_n=O(V_n)$

$U_n=o(V_n)$ et $V_n=o(W_n)\Rightarrow U_n=o(W_n)$

$U_n=O(V_n)$ et $V_n=O(W_n)\Rightarrow U_n=O(W_n)$

③ $U_n=o(V_n)$ et $\forall\lambda\in\mathbf{R}\Rightarrow\lambda U_n=o(V_n)$ et $\lambda U_n=o(\lambda V_n)$

$U_n=o(V_n)$ et λ_n suite borné $\Rightarrow\lambda_nU_n=o(V_n)$

$U_n=o(W_n)$, $V_n=o(W_n)\Rightarrow U_n+V_n=o(W_n)$ et $U_n-V_n=o(W_n)$

④ $U_n\underset{+\infty}{\sim}V_n$ et $V_n\underset{+\infty}{\sim}W_n\Rightarrow U_n\underset{+\infty}{\sim}W_n$

$U_n\underset{+\infty}{\sim}V_n$ et $X_n\underset{+\infty}{\sim}Y_n\Rightarrow U_nX_n\underset{+\infty}{\sim}V_nY_n$

$U_n\underset{+\infty}{\sim}V_n$ et $\forall p\in\mathbf{N}^*\Rightarrow(U_n)^p\underset{+\infty}{\sim}(V_n)^p$

$\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=l\in\mathbf{R}^*\Rightarrow U_n\underset{+\infty}{\sim}l$

$U_n\underset{+\infty}{\sim}V_n\Rightarrow(U_n)$ et (V_n) même signe, $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=l\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=l$

⑤ Comparaison logarithmique : soit $U_n>0$ et $V_n>0$ et

$\forall n>n_0\ \dfrac{U_{n+1}}{U_n}\le\dfrac{V_{n+1}}{V_n}\Rightarrow U_n=O(V_n)$

⑥ Soit $U_n>0$ et $V_n>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{U_{n+1}}{U_n}=l\in[0,1[\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$

⑦ $\forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ on a $\alpha<\beta\Leftrightarrow n^\alpha=o(n^\beta)$

$\forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ si $|a|<|b|\Leftrightarrow a^n=o(b^n)$

$\forall\alpha>0$ et $\forall\beta\in\mathbf{R}$ on a $(Log(n))^\beta=o(n^\alpha)$

$\forall a>1$ et $\forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ on a $n^\alpha=o(a^n)$ et $(Log(n))^\beta=o(a^n)$

$\forall a\in\mathbf{R}$ on a $a^n=o(n!)$ et $n^\alpha=o(n!)$

⑧ Exemple a retenir :

$U_n=a_pn^p+a_{p-1}n^{p-1}+\ldots+a_1n+a_0\Rightarrow U_n\underset{+\infty}{\sim}a_pn^p$

$U_n=\dfrac{a_pn^p+a_{p-1}n^{p-1}+\ldots+a_1n+a_0}{b_qn^q+b_{q-1}n^{q-1}+\ldots+b_1n+b_0}\Rightarrow U_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{a_pn^p}{b_qn^q}$

Soit une suite réelle tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}X_n=0$

$\sin(X_n)\underset{+\infty}{\sim}X_n$ $\qquad$ $\cos(X_n)\underset{+\infty}{\sim}1$

$tg(X_n)\underset{+\infty}{\sim}X_n$ $\qquad$ $(1-\cos(X_n))\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2}X_n^2$

$(e^{X_n}-1)\underset{+\infty}{\sim}X_n$ $\qquad$ $Log(1+X_n)\underset{+\infty}{\sim}X_n$

$\forall\alpha\in\mathbf{R}$ $\left((1+X_n)^\alpha-1\right)\underset{+\infty}{\sim}\alpha X_n$

2.8. Suites récurrentes :

$\left.\begin{array}{l}U_{n+1}=f(U_n)\ \ f\ continue\ en\ l\\ \lim\limits_{n\to+\infty}U_n=l\in I\end{array}\right\}\ f(l)=l$

3. Fonction d'un seul variable

3.1. Généralité :

Soit $f:I\mapsto\mathbf{R}$ avec $I\neq\varnothing$ et non réduit a un point alors :

① f ↗ sur $I\Leftrightarrow\forall x,y\in I$ si $x\le y$ on a $f(x)\le f(y)$

f ↘ sur $I\Leftrightarrow\forall x,y\in I$ si $x\le y$ on a $f(x)\ge f(y)$

f monotone sur I si f ↗ ou f ↘

f constante sur I si $\forall x,y\in I$ on a $f(x)=f(y)$

② f majoré sur I si $\exists n\in\mathbf{N}$ / $\forall x\in I\ \ f(x)\le n$

f minoré sur I si $\exists n\in\mathbf{N}$ / $\forall x\in I\ \ f(x)\ge n$

f borné sur I si elle est majoré et minoré sur I

③ f k-Lipscitzienne si $\exists k\in\mathbf{R}_+$ tel que

$\forall x,y\in I\ \ |f(x)-f(y)|\le k|x-y|$

④ f paire sur I si $\forall x\in I\ \ -x\in I$ *et* $f(-x)=f(x)$

f impaire sur I si $\forall x\in I\ \ -x\in I$ *et* $f(-x)=-f(x)$

⑤ f T-periodique sur I si $\exists T\in\mathbf{R}^*$ tel que

$\forall x\in I\ \ \forall x+T\in I\ \ f(x+T)=f(x)$

3.2. Limites :

3.2.1 Définition de limites :

Soit $f:I\mapsto\mathbf{R}$ avec $I\neq\varnothing$ et non réduit à un point soit $a\in\bar{I}$

$l\in\mathbf{R}$ $\quad\varepsilon,\alpha,A>0$ $\quad\beta,B<0$ alors :

① Limite de $f(x)$ si $x\to a$:

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon\,\exists\alpha\,\forall x\in I\ si\ |x-a|\le\alpha\Rightarrow|f(x)-l|\le\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty\Leftrightarrow\forall A\,\exists\alpha\,\forall x\in I\ si\ |x-a|\le\alpha\Rightarrow f(x)\ge A$

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty\Leftrightarrow\forall B\ \exists\alpha\,\forall x\in I\ si\ |x-a|\le\alpha\Rightarrow f(x)\le B$

② Limite de $f(x)$ si $x\to+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon\,\exists A\,\forall x\in I\ si\ x\ge A\Rightarrow f(x)-l\le\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\Leftrightarrow\forall A\,\exists\alpha\,\forall x\in I\ si\ x\ge\alpha\Rightarrow f(x)\ge A$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty\Leftrightarrow\forall B\ \exists\alpha\,\forall x\in I\ si\ x\ge\alpha\Rightarrow f(x)\le B$

③ Limite de $f(x)$ si $x\to-\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l\Leftrightarrow\forall\varepsilon\,\exists\beta\,\forall x\in I\ si\ x\le\beta\Rightarrow|f(x)-l|\le\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\Leftrightarrow\forall A\,\exists\beta\,\forall x\in I\ si\ x\le\beta\Rightarrow f(x)\ge A$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\Leftrightarrow\forall B\ \exists\beta\,\forall x\in I\ si\ x\le\beta\Rightarrow f(x)\le B$

3.2.2 Critère des limites par les suites :

Soit $f:I\mapsto\mathbf{R}$, (X_n) suite a valeur dans I et $b\in\bar{I}$, $l\in\bar{\mathbf{R}}$

$\lim\limits_{x\to b}f(x)=l\Leftrightarrow$ Si $\lim\limits_{n\to+\infty}X_n=b\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}f(X_n)=l$

$\lim\limits_{n\to+\infty}X_n=b$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}f(X_n)$ ⊠ $\Rightarrow\lim\limits_{x\to b}f(x)$ ⊠

$\lim\limits_{n\to+\infty}X_n=\lim\limits_{n\to+\infty}Y_n=b$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}f(X_n)\neq\lim\limits_{n\to+\infty}f(Y_n)\Rightarrow\lim\limits_{x\to b}f(x)$ ⊠

3.2.3 Propriété de limites :

① Soit $l\in\mathbf{R}$ on applique la règle de signe on a :

$l+(\infty)=\infty$ $\quad l\times(\infty)=\infty$ $\quad l/0=\infty$ $\quad l/\infty=0$

$(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty$ $\quad(\infty)\times(\infty)=\infty$ $\quad\infty/0=\infty$

Les formes indéterminés $+\infty-\infty$ ∞/∞ $0\times\infty$ $0/0$ 1^∞ 0^0 ∞^0

② $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ et g borné au V(a) $\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x).g(x)=0$

③ Si au V(a) $f(x) \le g(x)$

$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to a} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

④ Si au V(a) $g(x) \le f(x) \le h(x)$

$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = l \in \mathbf{R} \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = l$

⑤ $\lim_{x \to a} f(x) = l \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) = l$

3.2.4. Théorème de l'Hospital :

Soit $f, g \in C^1(I, \mathbf{K})$, $x_0 \in I$ et $f(x_0) = g(x_0)$ alors

Si $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbf{R} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

3.3. Comparaison des fonctions :

$f(x) \underset{a}{=} o g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$f(x) \underset{a}{=} O g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ borné au V(a)

$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

3.4. Continuité :

f continue en $a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

f continue a droit en $a \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

f continue a gauche en $a \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

f continue en $a \Leftrightarrow f$ continue a gauche et a droite en a

3.4.1. Critère de continuité par les suites :

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{R})$ et $a \in I$ f continue en $a \Leftrightarrow$

$\forall (X_n)$ a valeur dans I si $\lim_{n \to +\infty} X_n = a \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(X_n) = f(a)$

3.4.2. Prolongement par continuité :

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{R})$ et $a \in \overline{I}$ f admet un prolongement par continuité en $a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = l \in \mathbf{R}$ alors $g(x) = f(x)$ si $x \in I$ et égale l si $x = a$ est un prolongement par continuité de f

3.4.3. Théorème de valeur intermédiaires (T.V.I) :

① Soit $I \neq \varnothing$ et $f : I \mapsto \mathbf{R}$ continue $\forall a, b \in I$ ou $a \neq b$ et $\forall y$ entre $f(a)$ et $f(b) \Rightarrow \exists$ (ou moins) x entre a et b / $f(x) = y$

② Soit $I \neq \varnothing$ et $f : I \mapsto \mathbf{R}$ continue $\forall a, b \in I$ tel que $f(a).f(b) \le 0$ alors $\exists$ c compris entre a et b / $f(c) = 0$

3.5. Fonction réciproque des fonction circulaires :

3.5.1. Fonction arcsin :

$$\arcsin : [-1,1] \mapsto \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$x \mapsto \arcsin(x) = y$$

avec $\sin(y) = x \quad x \in [-1,1] \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \quad \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \quad \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$

① $\forall x \in [-1,1] \quad \sin(\arcsin(x)) = x$

② $\forall x \in \mathbf{R} \quad \arcsin(\sin(x)) = x \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

③ arcsin est impaire $\forall x \in [-1,1] \quad \arcsin(-x) = -\arcsin(x)$

④ $\arcsin(x) \underset{0}{\sim} x$

⑤ $\forall x \in]-1,1[\quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$

3.5.2. Fonction arccos :

$$\arccos : [-1,1] \mapsto [0, \pi]$$
$$x \mapsto \arccos(x) = y$$

avec $\cos(y) = x \quad x \in [-1,1] \quad y \in [0, \pi]$

$\arccos(0) = \frac{\pi}{2} \quad \arccos(1) = 0 \quad \arccos(-1) = \pi$

① $\forall x \in [-1,1] \quad \cos(\arccos(x)) = x$

② $\forall x \in \mathbf{R} \quad \arccos(\cos(x)) = x \Leftrightarrow x \in [0, \pi]$

③ $\forall x \in [-1,1] \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$

④ $A(0, \frac{\pi}{2})$ centre de symétrie de arccos

⑤ $\forall x \in]-1,1[\quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos(x)$

3.5.3. Relation arcsin et arccos :

$\forall x \in [-1,1] \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

$\forall x \in [-1,1] \quad \cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$

3.5.4. Fonction arctan :

$$\arctan : \mathbf{R} \mapsto \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$x \mapsto \arctan(x) = y$$

avec $\operatorname{tg}(y) = x \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\arctan(0) = 0 \quad \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \quad \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \quad \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$

① $\forall x \in \mathbf{R} \quad \operatorname{tg}(\arctan(x)) = x$ ② $\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$

③ $\forall x \in \mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \quad \arctan(\operatorname{tg}(x)) = x \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

④ arctg est impaire $\forall x \in \mathbf{R} \quad \arctan(-x) = -\arctan(x)$

⑤ $\forall x \in \mathbf{R}^* \quad \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } x < 0 \end{cases}$

⑥ $\forall x \in \mathbf{R} \quad \operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \int \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x)$

3.6. Dérivabilité :

3.6.1. Définition de dérivabilité :

Soit $f : I \mapsto \mathbf{R}$ avec $a \in I$ et $l \in \mathbf{R}$ on a :

① f dérivable en $a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = l \in \mathbf{R}$

② f dérivable a droit en $a \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l = f'_d(a)$

③ f dérivable a gauche en $a \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l = f'_g(a)$

④ f dérivable sur $I \Leftrightarrow f$ dérivable en tout point de I

$f' = f^{(1)}$ appelé fonction dérivé et $f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$

⑤ f dérivable en a si dérivable gauche droit et $f'_d(a) = f'_g(a)$

⑥ f dérivable en a alors la courbe C_f de f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente $T : y = f'(x)(x - a) + f(a)$

⑦ Si $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$ alors f n'est pas dérivable en a et C_f admet au point $A(a, f(a))$ une demi tangente verticale

⑧ f dérivable en $a \Leftrightarrow$

$\exists k \in \mathbf{R} \quad \forall x \in I \quad f(x) = f(a) + k(x - a) + o(x - a)$

⑨ f dérivable en $a \Rightarrow f$ continue en a

3.6.2. Dérivé usuelle :

Soit f,g dérivable alors c'est fonction dérivable et on a :

① $(f+\alpha g)' = f' + \alpha g'$ ② $(f^n)' = n.f'.f^{n-1}$

③ $(f.g)' = f'.g + f.g'$ ④ $(f/g)' = (f'.g - f.g')/g^2$

⑤ $(g \circ f)' = g'(f).f'$ ⑥ $(\sqrt{f})' = f'/(2\sqrt{f})$

⑦ $f'(x) = 0$ alors si $\exists\ (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

3.6.3. Dérivé successives :

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ $f : I \mapsto \mathbf{R}$ de classe C^n sur I si :

f n fois dérivable sur I

sa fonction dérivé d'ordre n est continue sur I

① convention f de classe C^0 sur I donc continue sur I

② f de classe C^∞ sur I si f de classe C^n sur I $\forall n \in \mathbf{N}$

③ Si f de classe C^n sur I alors $\forall p \in \{0,..,n\}$ f de classe C^p sur I

④ Si f,g et C^n alors $(f+g)(\lambda f)(f.g)(f/g)(f \circ g)$ et C^n

⑤ $\forall n \in \mathbf{N}$ $(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$

⑥ $\forall n \in \mathbf{N}$ $(\lambda f)^{(n)}(x) = \lambda f^{(n)}(x)$

⑦ $\forall n \in \mathbf{N}$ $(f.g)^{(n)}(x) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f_{(x)}^{(p)} . g_{(x)}^{(n-p)}$ formule Leibniz

3.7. Théorème de Rolle :

① Soit $f : I \mapsto \mathbf{R}$ *et* $a \in I$ et $\exists \varepsilon > 0$ / $\forall x \in I \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$

$f(x) \le f(a) \Rightarrow f$ admet un maximum relatif en a

$f(x) \ge f(a) \Rightarrow f$ admet un minimum relatif en a

② f admet un extremum relatif en a si f admet un maximum ou minimum relatif en a

③ Soit $f : I \mapsto \mathbf{R}$ *et* $a \in I$ et $\forall x \in I$

$f(x) \le f(a) \Rightarrow$ admet un maximum absolue en a

$f(x) \ge f(a) \Rightarrow$ admet un minimum absolue en a

④ Soit $f : I \mapsto \mathbf{R}$ *et* $a \in \overset{\circ}{I}$ si f dérivable en a et f admet un extremum relatif en a alors $f(a) = 0$

3.7.1. Théorème de Rolle :

Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors tel que $f(a) = f(b)$ alors $\exists$ au moins $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$

3.7.2. Théorème des accroissements finie :

Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$

alors $\exists$ au moins $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c).(b-a)$

3.7.3. Inégalité des accroissements finie :

Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$

① Si $m \le f'(x) \le M \Rightarrow m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$

② Si $|f'(x)| \le M \in \mathbf{R}_+^* \Rightarrow |f(b) - f(a)| \le M|b-a|$

3.7.4. Proposition :

① f constante si $\forall x$ $f'(x) = 0$

② $f \nearrow$ si $\forall x$ $f'(x) \ge 0$ ③ $f \searrow$ si $\forall x$ $f'(x) \le 0$

④ Si $\lim_{x \to a} f'(x) = L \in \overline{\mathbf{R}} \Rightarrow \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$

3.7.4. Formule Taylor Lagrange :

Soit $f \in C^n(I, \mathbf{R})$, $f^{(n+1)} \in \overset{\circ}{I}$ et $\forall a \ne b \in I$ $\exists$ c entre a et b

tel que $f(b) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \dfrac{f_{(a)}^{(k)}}{k!}(b-a)^k}_{\text{principale}} + \underbrace{\dfrac{f_{(c)}^{(n+1)}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}}_{\text{reste}}$

① pour n =0 Taylor Lagrange = accroissements finie

② Si on pose $h = b - a$ alors $\exists \theta \in]0,1[$ tel que

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_{(a)}^{(k)}}{k!} h^k + \frac{f_{(a+\theta h)}^{(n+1)}}{(n+1)!} h^{n+1}$$

③ Si $0 \in I$ on obtient le formule de Mac Lorin $\forall x \in I \setminus \{0\}$

$\exists \theta \in]0,1[$ tel que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f_{(0)}^{(k)}}{k!} x^k + \dfrac{f_{(\theta x)}^{(n+1)}}{(n+1)!} x^{n+1}$

3.8. Fonction convexes :

3.8.1. L'inégalité de convexité :

Soit $I \subset \mathbf{R}$ $f : I \mapsto \mathbf{R}$ convexe sur $I \Leftrightarrow \forall x, y \in I$ $\forall \alpha \in [0,1]$

$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$

3.8.2. L'inégalité de Jensen :

Soit $I \subset \mathbf{R}$ $f : I \mapsto \mathbf{R}$ convexe sur $I \Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}^*$ $\forall x_1, ..., x_n \in I$

$\forall \alpha_1, ..., \alpha_n \in [0,1]$ / $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ on a $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$

3.8.3. Taux d'accroissement et convexité :

Soit $a \in I$ $\tau_a = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ appelé taux d'accroissement de f

$f : I \mapsto \mathbf{R}$ convexe sur $I \Leftrightarrow \forall a \in I$ $\tau_a \nearrow$ *sur* $I - \{a\}$

3.8.4. Propriété :

① $f : I \mapsto \mathbf{R}$ convexe sur $I \Leftrightarrow f' \nearrow$ *sur* I

② $f : I \mapsto \mathbf{R}$ convexe sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I$ $f'' \ge 0$

③ $f : I \mapsto \mathbf{R}$ concave sur $I \Leftrightarrow f' \searrow$ *sur* I

④ $f : I \mapsto \mathbf{R}$ concave sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I$ $f'' \le 0$

3.9. Fonction hyperbolique des fonction circulaires :

3.9.1. Fonction sh :

$\text{sh} : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$

$x \mapsto \text{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

① sh est impaire $\forall x \in \mathbf{R}$ $\text{sh}(-x) = -\text{sh}(x)$

② $\forall x \in \mathbf{R}$ $\text{sh}'(x) = \text{ch}(x) > 0$

3.9.2. Fonction ch :

$\text{ch} : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$

$x \mapsto \text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

① ch est paire $\forall x \in \mathbf{R}$ $\text{ch}(-x) = \text{ch}(x)$

② $\forall x \in \mathbf{R}$ $\text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$ $\text{ch}(x) > 1$

3.9.3. Relation sh et ch :

$\forall x \in \mathbf{R}$ $\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x$ $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x}$

$\forall x \in \mathbf{R}$ $\text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x) = 1$

3.9.4. Fonction th :

$\text{th} : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$

$x \mapsto \text{th}(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

① th est impaire $\forall x \in \mathbf{R}$ $\text{th}(-x) = -\text{th}(x)$

② $\forall x \in \mathbf{R}$ $\text{th}'(x) = \dfrac{1}{\text{sh}^2(x)} = 1 - \text{th}^2(x)$

③ $\forall x \in \mathbf{R}$ $-1 < \text{th}(x) < 1$

4. Développement limité

4.1. Généralité :

4.1.1. Définition :

Si f défini au $V(x_0)$ alors f admet un DL d'ordre n au $V(x_0) \Leftrightarrow$

$\exists P_n$ $\deg(P_n) \le n$ / $f(x) = P_n(x) + (x - x_n)\varepsilon(x)$ *avec* $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

$P_n(x)$: partie régulière $(x - x_n)\varepsilon(x)$: reste alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} P_n(x)$

4.1.2. Unicité :

Si f possède un DL d'ordre n au $V(0)$ il est unique

4.1.2. Troncature :

Si f possède un DL d'ordre n au $V(0)$ de $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ et $p\le n$

alors f admet un DL d'ordre p et $P_p(x)=\left[P_n(x)\right]_p=\sum_{k=0}^{p}a_kx^k$

4.1.3. Parité :

Soit f possède un DL d'ordre n au $V(0)$ de partie régulière $P_n(x)$

$f(x)$ paire $\Rightarrow$ $P_n(x)$ paire $f(x)$ impaire $\Rightarrow$ $P_n(x)$ impaire

4.1.4. Continuité dérivabilité :

Soit $I\in\mathbf{R}$, $0\in I$ et définie sur I alors :

f continue en 0 $\Leftrightarrow$ f admet au $V(0)$ un DL d'ordre 0

f dérivable en 0 $\Leftrightarrow$ f admet au $V(0)$ un DL d'ordre 1

4.1.5. Taylor Young :

Si f est n fois dérivable au $V(0)$ alors

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}_{(0)}}{k!}x^k+o(x^n)$$

4.1.6. Exemple de fonction usuelle :

$\forall x\in V(0)$ on a :

① $(1+x)^\alpha=1+\alpha\frac{x}{1!}+\ldots+\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

$\alpha=\frac{1}{2}$ $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$

$\alpha=-1$ $\frac{1}{1+x}=1+-x+x^2+\ldots+(-1)^nx^n+o(x^n)$

$\alpha=-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+o(x^3)$

② $e^x=1+\frac{x}{1!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

③ $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}+o(x^{2p+1})$

④ $\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{p-1}\frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!}+o(x^{2p})$

⑤ $Log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$

⑥ $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+o(x^n)$

4.2. Opération sur les DL :

Soit $\forall x\in V(0)$ $f(x)=P(x)+o(x^n)$ *et* $g(x)=Q(x)+o(x^n)$

① Somme : $(f+g)(x)=P(x)+Q(x)+o(x^n)$

② Produit : $(f.g)(x)=\left[P(x).Q(x)\right]_n+o(x^n)$

③ Composé : $\lim_{x\to0}f(x)=0$ alors $(g\circ f)(x)=\left[Q(P(x))\right]_n+o(x^n)$

④ Quotient : f/g division suivant puissance $P(x)$ par $Q(x)$

⑤ Primitive : Si f continue alors $F(x)=F(0)+\int P(x)+o(x^{n+1})$

⑥ Dérivé : $f'(x)=P'(x)+o(x^{n-1})$

4.3. Etude locale d'un courbe :

Soit $\forall x\in V(0)$ et $n\ge2$ et Cf courbe de f on a

$f(x)=a_0+a_1(x-a)+\ldots+a_n(x-a)^n+o(x-a)^n$

4.3.1. Position par rapport à la tangente en un point :

L'équation de la tangente a Cf au point $(a,f(a))$ s'écrit :

$T_a: y=a_0+a_1(x-a)=f(a)+f'(a)(x-a)$

Si n pair Cf se trouve

① au dessus de T_a si $a_n>0$

② au dessous de T_a si $a_n<0$

Si n impair Cf traverse T_a et se trouve

① au dessus de T_a si ($a_n>0$ et $x>a$) ou ($a_n<0$ et $x<a$)

② au dessous de T_a si ($a_n>0$ et $x<a$) ou ($a_n<0$ et $x>a$)

4.3.2. Position par rapport a une asymptote horizontale :

C'est un DL de la forme $f(x)=\alpha+\frac{a_n}{x^n}+o(\frac{1}{x^n})$

Si n pair Cf se trouve

① au dessus de l'asymptote $y=\alpha$ si $a_n>0$

② au dessous de l'asymptote $y=\alpha$ si $a_n<0$

Si n impair on peut dresser le tableau suivant

① au dessus de l'asymptote $y=\alpha$ si $sig(a_n).sig(x)>0$

② au dessous de l'asymptote $y=\alpha$ $sig(a_n).sig(x)<0$

4.3.3. Position par rapport a une asymptote oblique :

On utilise $f(x)=\alpha x+\beta+\frac{a_n}{x^n}+o(\frac{1}{x^n})$

l'asymptote de forme $y=\alpha x+\beta$

et les conclusions comme les asymptote horizontale

5. Intégration et dérivation

5.1. Fonction continue par morceaux :

5.1.1. Subdivision d'un intervalle de :

On appelle subdivision de $[a,b]$ toute famille $(a_i)_{0\le i\le n}$ tel que

$a=a_0<a_1<\ldots<a_n=b$

① $S(a,b)$ l'ensemble des subdivision de $[a,b]$

5.1.2. Fonction en escalier :

f est une fonction en escalier si $\exists$ une subdivision $(a_i)_{0\le i\le n}$

tel que $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $f_{/]a_{k-1},a_k[}=\lambda_k$ avec $\lambda_k\in\mathbf{R}$

① $(a_i)_{0\le i\le n}$ subdivision subordonnée a f si $\forall k$ $f_{/]a_{k-1},a_k[}=cst$

② $E(a,b)$ est l'ensemble des fonction en escalier sur $[a,b]$

③ $(E(a,b),+,\times)$ est un $\mathbf{R}$ *ev*

5.1.3. Fonction continue par morceaux (c.p.m) :

f continue par morceaux sur $[a,b]$ si $\exists(a_i)_{0\le i\le n}\in S(a,b)$

tel que $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $f_{/]a_{k-1},a_k[}$ est continue et f admet une limite

finie a droite de a_{k-1} et a gauche de a_k

① $CM([a,b],\mathbf{K})$ ensemble des f continue par morceaux sur $\mathbf{K}$

② $f\in CM([a,b],\mathbf{K})$ alors f est borné sur $[a,b]$

③ $CM([a,b],\mathbf{K})$ est un $\mathbf{K}$ *ev*

5.2. Intégration d'une fonction continue par morceaux :

5.2.1. Intégration d'une fonction en escalier :

Soit $S=(a_i)_{0\le i\le n}$ subdivision subordonnée a f et $\lambda_k=f_{/]a_{k-1},a_k[}$

$\forall k\in[\![1,n]\!]$ on pose $I(f,S)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k-1}(a_k-\lambda_{k+1})$ on remarque

que $I(f,S)$ indépendant de S est on appelle l'intégrale de

f sur $[a,b]$ on le note $I(f)=\int_a^b f=\int_{[a,b]}f=\int_a^b f(x)dx$

5.2.2. Propriété d'une intégrale :

Soit $f,g\in CM([a,b],\mathbf{R})$

① $f\ge0\ sur\ [a,b]\Leftrightarrow\forall x\in[a,b]\ \int_a^b f=0$

② $\int_a^b f=-\int_b^a f$ *et* $\int_a^a f=0$

③ Linéarité $\lambda\in\mathbf{R}\Rightarrow\int_a^b(f+\lambda g)=\int_a^b f+\lambda\int_a^b g$

④ Croissance $f\le g\Rightarrow\int_a^b f\le\int_a^b g$

⑤ Valeur absolue $a<b \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$

⑥ Comparaison $a<b$ et $f<g \Rightarrow \int_a^b f \le \int_a^b g$

⑦ Relation de Chasles $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

⑧ Valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$

⑨ Inégalité de la moyenne $\left|\int_a^b f.g\right| \le \sup_{[a,b]}|f| . \int_a^b |g|$

en particulier $\left|\int_a^b f.g\right| \le |b-a| \sup_{[a,b]}|f|$

5.2.3. Théorème Cauchy Schwarz :

Soit $f,g \in C([a,b],\mathbf{R}) \Rightarrow \left|\int_a^b f.g\right| \le \left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}}$

5.2.4. Théorème Darboux Riemann :

Soit $f \in C([a,b],\mathbf{R}) \Rightarrow \int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$

5.3. Primitive et intégration d'une fonction continue :

Soit $f : I \mapsto \mathbf{R}$ et $F : I \mapsto \mathbf{R}$ et $a \in I$

① F primitive de f si F dérivable sur I et $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$

② $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ l'unique primitive de f qui s'annule en a

③ $\int_a^x f(t)dt = [F(x)]_a^x = F(x) - F(a)$

④ $f \in C^p(I,\mathbf{R})$ et $\Psi,\varphi \in C^{p+1}(J,I)$ alors $\Omega \in C^{p+1}(J,\mathbf{R})$ et on a

$$\Omega'(x) = \left(\int_{\varphi(x)}^{\Psi(x)} f(t)dt\right)' = \Psi'(x)f(\Psi(x)) - \varphi'(x)f(\varphi(x))$$

⑤ Primitive usuelle :

$$\int f' + \alpha g' = f + \alpha g \qquad \int f'.g + f.g' = f.g \qquad \int \frac{f'.g - f.g'}{g^2} = \frac{f}{g}$$

$$\int f^n.f' = \frac{f^{n+1}}{n+1} \ (n \neq -1) \qquad \int \frac{f'}{f} = Log|f| \qquad \int \frac{f'}{2\sqrt{f}} = \sqrt{f}$$

5.4. Intégration par partie :

Soit f,g deux fonction de classe C^1 sur I et $a,b \in I$ alors :

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

5.5. Changement de variable :

Soit f continue sur I et φ de classe C^1 sur J alors $\forall \alpha,\beta \in J$ on a

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

5.6. Formule de Taylor :

5.6.1. Formule de Taylor avec reste d'intégrale :

Soit f de classe C^1 sur I, $n \in \mathbf{N}$ et $a \in I$ alors on a $\forall b \in I$

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_{(a)}^{(k)}}{k!}(b-a)^k + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n f_{(x)}^{(n+1)}dx}_{\text{reste d'intégrale}}$$

5.6.2. Inégalité de Taylor :

Soit f de classe C^1 sur I, $n \in \mathbf{N}$ supposant qu'il existe $A \in \mathbf{R}^+$ tel que $\forall x \in I \quad \left|f_{(x)}^{(n+1)}\right| \le A$ alors $\forall a,b \in I$ on a

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f_{(x)}^{(k)}}{k!}(b-a)^k\right| \le \frac{M}{(n+1)!}|b-a|^{n+1}$$

5.7. Exemple de calcule primitive :

Soit $P \in \mathbf{R}_n[x]$ la recherché $\int f(x)dx$ se fait :

① $f(x) = Pe^{\alpha x}, P\cos(\alpha x), P\sin(\alpha x)$: n intégration par partie

② $f \in \mathbf{R}_n(x)$: décomposition en élément simple

③ $f(x) = \cos^m(x)\sin^n(x)$: si m et n paire linéarisation
si m et n impaire changement de variable

④ Règle de Bioche :

Soit $f(x) = g(\sin(x),\cos(x))$ dans le cas ou $f(x)dx$ invariante

en changent x par $-x$ on pose $t = \cos(x)$

en changent x par $\pi - x$ on pose $t = \sin(x)$

en changent x par $\pi + x$ on pose $t = \mathrm{tg}(x)$

Sinon on peut posé $t = \mathrm{tg}(\frac{x}{2})$

⑤ $f(x) = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+a}}$ changement de variable $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+a}}$

6. Equation différentielle

6.1. Equation différentielle linéaire du premier ordre :

Soit $a(x),b(x) \in C(I,\mathbf{R})$ et $(E) : a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$

L'équation homogène est $(E_0) : a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$

à une solution s'écrit $y_0(x) = \lambda e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx} \quad \lambda \in \mathbf{R} \quad \forall x \in I \ a(x) \neq 0$

Soit $z(x)$ une solution particulière apparente sinon on pose

$z(x) = \lambda(x)e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}$ et on cherche avec variation de constante

En fin la solution générale est $y(x) = y_0(x) + z(x)$

6.2. Equation différentielle linéaire du second ordre :

Soit $a,b,c \in \mathbf{R}$ et $(E) : ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$

On résout l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$

① Deus racines distincts la solution est $y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$

② Une racine double la solution est $y(x) = (\lambda t + \mu)e^{rx}$

③ Deux racine complexe $r = \alpha \pm i\beta$ les solution dans $\mathbf{R}$ est

$y(x) = (\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x))e^{\alpha x} = (k\cos\beta(x - x_0))e^{\alpha x}$

7. Complément

7.1. Nombres Compiexes :

Soit $z \in \mathbf{C}$ alors on a :

7.1.1. Définition :

$z = x + yi = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = re^{i\theta}$

$\overline{z} = x - yi = r(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) = re^{-i\theta}$

$x = \mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad y = \mathrm{Im}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2i}$

$r = |z| = |\overline{z}| = \sqrt{z.\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = \arg(z)[2\pi]$ *avec* $\cos\theta = x/|z| \quad \sin\theta = y/|z|$

7.1.2. Propriété :

① $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad |z| = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = 1/z$

② $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) \qquad z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

③ $z \in \mathbf{R} \Rightarrow z = \overline{z} \qquad z \in i\mathbf{R} \Rightarrow z = -\overline{z}$

③ $z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0(\pi) \qquad z \in i\mathbf{R} \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}(\pi)$

④ $re^{i\pi} = -r \qquad re^{i\frac{\pi}{2}} = \pm ri$

⑤ Formule de Moivre $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

⑥ Formule d'Euler : $2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \qquad 2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$

7.1.3. Racine d'un nombre complexe :

Soit $z^n = a \in \mathbf{C}^*, n \in \mathbf{N}^*$ *et* $a = re^{i\theta}$ alors

$S_{\mathbf{C}} = \left\{\sqrt[n]{r}.e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \ ; \ k \in [\![0,..,n-1]\!]\right\}$

7.1.4. Equation de second degré dans C :

Soit $a,b,c \in \mathbf{C}, a \neq 0$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet 2 solution dans $\mathbf{C}$ $S_{\mathbf{C}} = \left\{\frac{-b+\delta}{2a}, \frac{-b+\delta}{2a}\right\}$ avec $\delta^2 = b^2 - 4ac$

7.2. Trigonométrie :

7.2 1. Définition :

① $\operatorname{tg}(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\quad \operatorname{cotg}(x)=\dfrac{1}{\operatorname{tg}(x)}=\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

② $\forall x\in\mathbf{R}\quad \cos^2(x)+\sin^2(x)=1$

③ $\forall x\in\mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}\quad 1+\operatorname{tg}^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$

④ $\forall x\in\mathbf{R}\setminus\{k\pi\}\quad 1+\operatorname{cotg}^2(x)=\dfrac{1}{\sin^2(x)}$

⑤ sin, cos est 2π périodique $\quad$ tg, cotg est π périodique

⑥ $\forall x\in\mathbf{R}\quad -1\le\cos(x)\le 1\quad -1\le\sin(x)\le 1$

7.2 2. Formule angles associés :

① $\cos(-x)=\cos(x)\quad \sin(-x)=-\sin(x)$

② $\cos(\pi-x)=-\cos(x)\quad \sin(\pi-x)=\sin(x)$

③ $\cos(\pi+x)=-\cos(x)\quad \sin(\pi+x)=-\sin(x)$

④ $\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin(x)\quad \sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos(x)$

⑤ $\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(x)\quad \sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos(x)$

7.2 3. Formule d'addition :

① $\cos(a\pm b)=\cos(a)\cos(b)\mp\sin(a)\sin(b)$

② $\sin(a\pm b)=\sin(a)\sin(b)\pm\cos(a)\cos(b)$

③ $\operatorname{tg}(a\pm b)=\dfrac{\operatorname{tg}(a)\pm\operatorname{tg}(b)}{1\mp\operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(a)}$

7.2 4. Formule de duplication :

① $\cos(2x)=2\cos^2(x)-1=1-\sin^2(x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$

② $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$

③ $\operatorname{tg}(2x)=\dfrac{2\operatorname{tg}(x)}{1-\operatorname{tg}^2(x)}$

7.2 5. Formule de linéarisation :

$\cos^2(x)=\dfrac{1+\cos(2x)}{2}\quad \sin^2(x)=\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

7.2 6. Formule de transformation :

① $a\cos(x)+b\sin(x)=r\cos(x-\phi)$ avec

$r=\sqrt{a^2+b^2}\quad et\quad \cos\phi=a/r\quad \sin\phi=b/r$

② $t=\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)\Rightarrow \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\quad \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}\quad \operatorname{tg}x=\dfrac{2t}{1-t^2}$

7.2 6.1. Formule de transformation de produit en somme :

① $\cos(a).\cos(b)=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$

② $\sin(a).\sin(b)=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$

③ $\sin(a).\cos(b)=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$

7.2 6.2. Formule de transformation de somme en produit :

① $\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

② $\cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

③ $\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

④ $\sin(p)-\sin(q)=2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

7.2.7. Limite des fonctions Trigonométrie :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{x}=1\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(ax)}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x}=0$

7.2.8. Dérivé et intégrale des fonctions Trigonométrie :

① $\cos(ax+b)=-a\sin(ax+b)\quad \sin(ax+b)=a\cos(ax+b)$

$\operatorname{tg}'(ax+b)=a(1+\operatorname{tg}^2(ax+b))=a/\cos^2(ax+b)$

$\operatorname{cotg}'(ax+b)=-a(1+\operatorname{tg}^2(ax+b))=-a/\sin^2(ax+b)$

② $\int f'(x)\cos(f(x))dx=\sin(f(x))$

$\int f'(x)\sin(f(x))dx=-\cos(f(x))$

7.2.9. Equation Trigonométrique :

$\cos x=\cos x_0\Rightarrow S_{\mathbf{R}}=\{x_0+2k\pi\,,-x_0+2k\pi\ /k\in\mathbf{Z}\}$

$\sin x=\sin x_0\Rightarrow S_{\mathbf{R}}=\{x_0+2k\pi\,,\pi-x_0+2k\pi\ /k\in\mathbf{Z}\}$

$\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}x_0\Rightarrow S_{\mathbf{R}}=\{x_0+k\pi\ /k\in\mathbf{Z}\}$

$\cos x=0\Rightarrow S_{\mathbf{R}}=\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbf{Z}\}\quad \sin x=0\Rightarrow S_{\mathbf{R}}=\{k\pi/k\in\mathbf{Z}\}$

7.2.10. Inéquation Trigonométrique :

$\cos x\ge\cos x_0\Rightarrow -x_0+2k\pi\le x\le x_0+2k\pi\ /k\in\mathbf{Z}$

$\sin x\ge\sin x_0\Rightarrow x_0+2k\pi\le x\le\pi-x_0+2k\pi\ /k\in\mathbf{Z}$

$\operatorname{tg}x\ge\operatorname{tg}x_0\Rightarrow x_0+k\pi\le x\le\frac{\pi}{2}+k\pi\ /k\in\mathbf{Z}$

7.3. Fonction Logarithme :

① $Log:\left]\mathbf{0},+\infty\right]\mapsto\mathbf{R}$, $x\mapsto Log(x)$ $\qquad \operatorname{Log}(1)=0$

② $\operatorname{Log}(u(x))$ existe $\Leftrightarrow$ $u(x)$ existe et $u(x)>0$

③ $\operatorname{Log}(ab)=\operatorname{Log}(a)+\operatorname{Log}(b)\quad \operatorname{Log}(a/b)=\operatorname{Log}(a)-\operatorname{Log}(b)$

$\forall\alpha\in\mathbf{R}\quad \operatorname{Log}(a^{\alpha})=\alpha\operatorname{Log}(a)$

④ $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{Log}(x)=-\infty\quad \lim\limits_{x\to 0^+}x\operatorname{Log}(x)=0\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{Log}(x+1)}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{Log}(x)=+\infty\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{Log}(x)}{x}=0\quad \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{Log}(x)}{x-1}=1$

⑤ $\operatorname{Log}(a)=\operatorname{Log}(b)\Leftrightarrow a=b\quad \operatorname{Log}(a)>\operatorname{Log}(b)\Leftrightarrow a>b$

$\operatorname{Log}(a)>0\Leftrightarrow a>1\quad \operatorname{Log}(a)>0\Leftrightarrow 0<a<1$

⑥ $\operatorname{Log}'(u)=\dfrac{u'}{u}\quad \int\dfrac{u'}{u}=\operatorname{Log}|u|$

7.4. Fonction Exponentielles :

① $e:\mathbf{R}\mapsto\left]\mathbf{0},+\infty\right]$, $x\mapsto e^x$ $\qquad e^0=1$

② $e^{a+b}=e^a\times e^b\quad e^{a-b}=e^a/e^b\quad \forall\alpha\in\mathbf{R}\quad (e^a)^{\alpha}=e^{a\alpha}$

③ $\forall x\in\mathbf{R}_+^*\quad e^{\operatorname{Log}(x)}=\operatorname{Log}(e^x)=x$

④ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\quad \lim\limits_{x\to-\infty}x.e^x=0\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$

⑤ $\left(e^u\right)'=u'.e^u\quad \int u'.e^u=e^u$

7.5. Produit remarquable :

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

② $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

③ $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

④ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

⑤ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

⑥ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

⑦ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail